# ACTIVIDADES DE GEOMETRIA EN EL ESPACIO

1. Sean los vectores $\vec{v}_1=(0,1,0)$, $\vec{v}_2=(2,1,-1)$ $y$ $\vec{v}_3=(2,3,-1)$
   a) ¿Son los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ $y$ $\vec{v}_3$ linealmente dependientes?
   b) ¿Para qué valores de *a* el vector (4,a+3,-2) puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ $y$ $\vec{v}_3$?
   c) Calcula un vector unitario y perpendicular a $\vec{v}_1$ $y$ $\vec{v}_2$. [Junio 2005]

*Solución*:

a) Para que los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ $y$ $\vec{v}_3$ sean linealmente dependientes se ha de cumplir que el determinante formado con sus respectivas componentes sea cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0+0-2-0-0+2=0 \Rightarrow \text{Luego si son l. d.}$$

b) Como los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ $y$ $\vec{v}_3$ son l. d., si nos fijamos en los vectores observamos que $\vec{v}_3=2\vec{v}_1+\vec{v}_2$, por tanto habrá que ver que el vector $\vec{u}=(4,a+3,-2)$ depende linealmente de $\vec{v}_1$ $y$ $\vec{v}_2$, para lo cual se tiene que verificar que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & a+3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

-4+4=0

El valor del determinante es cero y no depende de a. Por tanto el vector $\vec{u}$ depende linealmente de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ $y$ $\vec{v}_3$, sea cual sea el valor del parámetro "a".

c) Un vector perpendicular a $\vec{v}_1$ $y$ $\vec{v}_2$ es el producto vectorial de ambos vectores:

$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)=(-1,0,-2)\,||\,(1,0,2)$$

Para obtener un vector unitario debemos dividir el vector obtenido por su módulo:

$$|(1,0,2)|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$(1,0,2)\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Luego el vector unitario y perpendicular a $\vec{v}_1$ $y$ $\vec{v}_2$ es $\vec{w}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

---

2. Se sabe que los puntos A(m,0,1), B(0,1,2), C(1,2,3) y D(7,2,1) están en un mismo plano.
   a) Halla *m* y calcula la ecuación de dicho plano.
   b) ¿Están los puntos B, C y D alineados? [Select. 2005]

*Solución*:

**(a)** Calculemos los vectores siguientes

$\overrightarrow{BC} = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 1,\ 2) = (1,\ 1,\ 1)$ ; $\overrightarrow{BD} = (7,\ 2,\ 1) - (0,\ 1,\ 2) = (7,\ 1,\ -1)$

Podemos observar que son dos vectores linealmente independientes ya que sus coordenadas no son proporcionales, es decir, los tres puntos $B$, $C$ y $D$ no están alineados.

Obtengamos la ecuación del plano que pasa por el punto $B$ y tiene como vectores de dirección, los dos anteriores.

$$\pi: \begin{cases} x = \lambda + 7\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = 2 + \lambda - \mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 7 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+z-2+7y-7-7z+14-x+y-1=0 \Rightarrow \pi: -2x+8y-6z+4=0$$

Calculamos m, teniendo en cuenta que el punto A(m,0,1) pertenece al plano y que sus coordenadas han de satisfacer la ecuación del plano:

$$-2\cdot m+8\cdot 0-6\cdot 1+4=0 \Rightarrow -2m-6+4=0 \Rightarrow m=\frac{2}{-2} \Rightarrow m=-1$$

(b) Los puntos B, C y D no están alineados, según se ha justificado en el apartado anterior.

---

3. Calcula la distancia entre las rectas

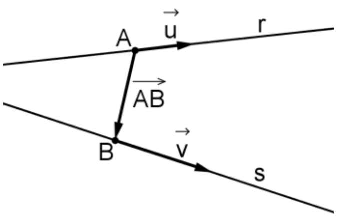
$$r: \begin{cases} x = 6+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 5-7\lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$$

[Select. 2005]

*Solución*:

Estudiemos en primer lugar la posición relativa de ambas rectas. Para ello expresemos la ecuación de la recta s en forma paramétrica:

$$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{array}{r} 2x-3y+1=0 \\ -9x+3y+6=0 \\ \hline -7x \qquad +7=0 \end{array} \Rightarrow x=1,\ \ 2\cdot 1-3y+1=0 \Rightarrow -3y=-3 \Rightarrow y=1 \quad \Rightarrow s: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\ \ \mu \end{cases}$$




$$r: \begin{cases} A=(6,1,5) \\ \vec{u}=(1,-2,-7) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} B=(1,1,0) \\ \vec{v}=(0,0,1) \end{cases}$$

Estudiamos la dependencia lineal de los vectores:

$$\overrightarrow{AB}=(-5,0,-5),\ \vec{u}=(1,-2,-7)\ \ y\ \ \vec{v}=(0,0,1)$$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10+0+0-0-0-0=10 \neq 0$. Por tanto los vectores $\overrightarrow{AB}, \vec{u}\ y\ \vec{v}$ son l. i., por lo que las rectas se cruzan.

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\begin{vmatrix}-5 & 0 & -5\\ 1 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}{\left|\left(\begin{vmatrix}-2 & -7\\ 0 & 1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1 & -7\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right)\right|}=\frac{|10|}{|(-2,-1,0)|}=\frac{10}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\cdot\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}\,u$$

---

4. Considera las rectas $r\equiv\begin{cases}x+z-2=0\\ x-y-1=0\end{cases}$ $y$ $s\equiv\frac{x}{2}=y-1=\frac{z}{3}$,

   a) Halla la ecuación del plano $\pi$ que contiene a $s$ y es paralelo a $r$.
   b) Calcula la distancia de la recta $r$ al plano $\pi$. [Select. 2005]

*Solución*:

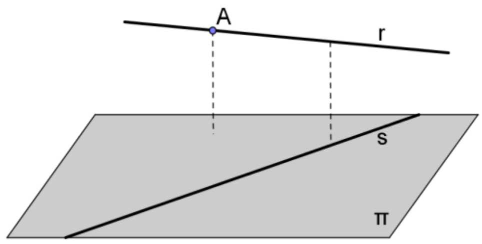
a) Como se necesita un punto y la dirección de cada una de las rectas, expresamos sus ecuaciones en paramétricas:

$$z=\lambda\Rightarrow x+\lambda-2=0\Rightarrow x=2-\lambda$$
$$2-\lambda-y-1=0\Rightarrow -y=-1+\lambda\Rightarrow y=1-\lambda$$

$$r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\qquad s:\begin{cases}x=2\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=3\lambda\end{cases}$$

$$r:\begin{cases}A=(2,1,0)\\ \vec{d}_r=(-1,-1,1)\end{cases}\qquad s:\begin{cases}B=(0,1,0)\\ \vec{d}_s=(2,1,3)\end{cases}$$

El plano que se pide viene determinado por:




$$\pi:\begin{cases}B=(0,1,0)\\ \vec{u}=\vec{d}_r=(-1,-1,1)\\ \vec{v}=\vec{d}_s=(2,1,3)\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}x & y-1 & z\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$-3x+2y-2-z+2z-x+3y-3=0\Rightarrow\boxed{\pi:-4x+5y+z-5=0}$$

b) Al ser la recta r paralela al plano $\pi$, la distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de r, por ejemplo A=(2,1,0) a dicho plano:

$$dist(r,\pi)=dist(A,\pi)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-4\cdot2+5\cdot1+0-5|}{\sqrt{(-4)^2+5^2+1^2}}=\frac{|-8|}{\sqrt{42}}=\boxed{\frac{8}{\sqrt{42}}}$$

---

5. Considera las rectas $r\equiv\begin{cases}x=y\\ z=2\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x+y=1\\ z=3\end{cases}$

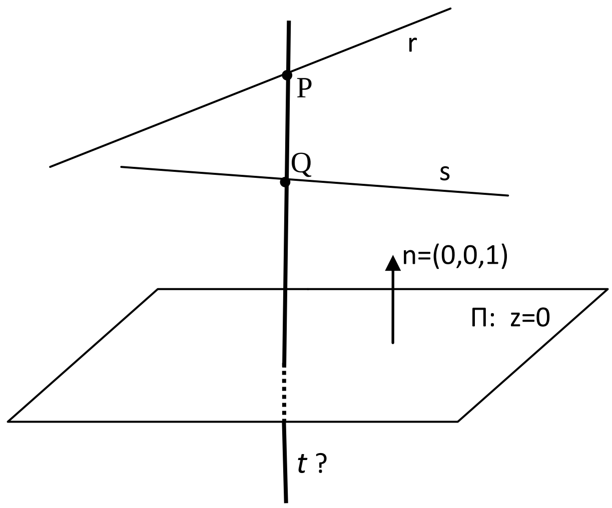
Halla la ecuación de una recta que corte a $r$ y $s$ y sea perpendicular al plano $z=0$.

[Select. 2004]

*Solución*:

Expresemos las ecuaciones de las rectas r y s en forma paramétrica para elegir después un punto genérico de cada una de ellas:

$r:\begin{cases} x=y \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}, \quad s:\begin{cases} x+y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=1-\mu \\ y=\quad\mu \\ z=3 \end{cases}$




Un punto genérico de r es $P=(\lambda,\lambda,2)$ y un punto genérico de s es $Q=(1-\mu,\mu,3)$

La recta que pasa por P y Q, es decir la que corta a r y a s, le imponemos la condición de ser perpendicular al plano z=0. Para ello el vector de dirección de la recta $\vec{d}_t=\overrightarrow{PQ}$ y el vector normal del plano, $\vec{n}_\pi=(0,0,1)$, tienen la misma dirección, es decir, son paralelos, luego sus coordenadas son proporcionales.

$\vec{d}_t=\overrightarrow{PQ}=(1-\mu-\lambda,\mu-\lambda,1)$. Establezcamos la proporcionalidad de ambos vectores:

$$\frac{0}{1-\mu-\lambda}=\frac{0}{\mu-\lambda}=\frac{1}{1}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{0}{1-\mu-\lambda}=\dfrac{1}{1}\Rightarrow 1-\mu-\lambda=0 \\ \dfrac{0}{\mu-\lambda}=\dfrac{1}{1}\Rightarrow \qquad \mu-\lambda=0 \end{cases}$$

$$\overline{1\quad -2\lambda=0}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\quad,\mu-\frac{1}{2}=0,\ \mu=\frac{1}{2}$$

Luego el punto $P=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$, la resta t queda determinada por: $t:\begin{cases} P=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right) \\ \vec{d}_t=(0,0,1) \end{cases}\Rightarrow \boxed{t:\begin{cases} x=1/2 \\ y=1/2 \\ z=2+\lambda \end{cases}}$

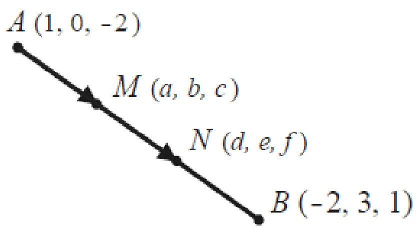
---

6. Considera los puntos *A(1,0,-2)* y *B(-2,3,1)*.
   a) Determina los puntos del segmento *AB* que lo dividen en tres partes iguales.
   b) Calcula el área del triángulo de vértices *A, B y C*, donde *C* es un punto de la recta de ecuación *-x=y-1=z.* ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto *C?*

[Sept. 2006]

*Solución*:

a) Teniendo en cuenta el dibujo:




$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow 3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow 3(a-1,b-0,c+2)=(-3,3,3)\Rightarrow$$

$$(3a-3,3b,3c+6)=(-3,3,3)\Rightarrow\begin{cases} 3a-3=-3, & a=0 \\ 3b=3, & b=1 \\ 3c+6=3, & c=-1 \end{cases}\qquad \boxed{M(0,1,-1)}$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow 3\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow 3(d-1,e-0,f+2)=2(-3,3,3)\Rightarrow$$

$$(3d-3,3e,3f+6)=(-6,6,6)\Rightarrow\begin{cases} 3d-3=-6, & d=-1 \\ 3e=6, & e=2 \\ 3f+6=6, & f=0 \end{cases}\qquad \boxed{N(-1,2,0)}$$

b) Expresemos la ecuación de la recta dada en forma paramétrica para tomar un punto genérico de la misma:

$$r: -x = y-1 = z \Rightarrow r: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto cualquiera $C$ de esta recta es el $C\,(-\lambda, 1+\lambda, \lambda)$.

Para calcular el área del triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ calculemos antes las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\vec{AB} = (-2, 3, 1) - (1, 0, -2) = (-3, 3, 3)$$

$$\vec{AC} = (-\lambda, 1+\lambda, \lambda) - (1, 0, -2) = (-\lambda - 1, 1+\lambda, \lambda + 2)$$

El área del triángulo $ABC$ es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-3, 3, 3) \times (-\lambda - 1, 1+\lambda, \lambda + 2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1+\lambda & \lambda+2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -\lambda-1 & \lambda+2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -\lambda-1 & 1+\lambda \end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(3\lambda + 6 - 3 - 3\lambda,\ 3\lambda + 6 - 3\lambda - 3,\ -3 - 3\lambda + 3\lambda + 3)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(3, 3, 0)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ \text{u}^2.$$

Resulta que el área no depende de $\lambda$, esto quiere decir que el área no depende de la elección del punto C de la recta.

---

7. Considera el plano $\pi$ de ecuación *2x+y-z+2=0* y la recta $r$ de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$

   a) Halla la posición relativa de $r$ y $\pi$ según los valores del parámetro *m.*
   b) Para *m=-3* , halla el plano que contiene a la recta $r$ y es perpendicular al plano $\pi$.
   c) Para *m=-3,* halla el plano que contiene a la recta $r$ y es paralelo al plano $\pi$.

[Junio 2006]

*__Solución__*:

a) Para estudiar la posición relativa de la recta y el plano, hallamos el producto escalar del vector director de la recta r, $\vec{d}_r = (-2,1,m)$ y el vector normal del plano $\pi$, $\vec{n}_\pi = (2,1,-1)$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-2,1,m)\cdot(2,1,-1) = -4+1-m = -3-m$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow -3-m = 0 \Rightarrow m = -3,$

· Si $m = -3 \Rightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi$ y entonces la recta y el plano son coincidentes o paralelos. Como un punto cualquiera de la recta r, por ejemplo el A=(5,0,6), no pertenece al plano pues no verifica su ecuación ( $2\cdot 5+0-6+2 = 10-6+2 = 6 \neq 0$), la recta no está contenida en el plano. Por tanto la recta y el plano son PARALELOS.

· Si $m \neq -3 \Rightarrow \vec{d}_r \not\perp \vec{n}_\pi$ y entonces la recta y el plano son SECANTES, se cortan en un punto.

**(b)** El plano que nos piden al contener a la recta $r$, permitirá conocer del mismo un punto, el (5, 0, 6), y un vector de dirección, el (−2, 1, −3), ambos elementos petenecientes a la recta y que los obtenemos leyendo en la ecuación de la recta $r$ que nos da el problema.

El plano que piden al ser perpendicular al plano $\pi$ nos permitirá deducir que el vector normal a éste, el (2, 1, −1), será el otro vector de dirección que nos quedaba por conocer del plano; por tanto la ecuación del plano que contiene a la recta $r$ y es perpendicular al plano $\pi$ es:

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 5-2\lambda+2\mu \\ y = \lambda+\mu \\ z = 6-3\lambda-\mu \end{cases}$$

**(c)** El plano que nos piden ahora es paralelo al plano $\pi$, luego teniendo en cuenta la condición de paralelismo de planos, deducimos que la ecuación del plano será, inicialmente, de la forma: $\pi \equiv 2x+y-z+2=0 \;\rightarrow\; \pi_2 \equiv 2x+y-z+\mathrm{D}=0$

Para calcular D le impondremos la condición que nos dice el problema, la de contener a la recta $r$, luego le haremos pasar por un punto de la misma, por ejemplo, por el (5, 0, 6).

$$2x+y-z+\mathrm{D}=0 \;\rightarrow\; 2\cdot 5+0-6+\mathrm{D}=0 \;\rightarrow\; \mathrm{D}=-4 \;\rightarrow\; \boxed{\pi_2 \equiv 2x+y-z-4=0}$$

---

8. Considera los puntos *A(2,1,2)* y *B(0,4,1)* y la recta *r* de ecuación $x=y-2=\dfrac{z-3}{2}$

a) Determina un punto *C* de la recta *r* que equidiste de los puntos *A* y *B.*
b) Calcula el área del triángulo de vértices *ABC.*

[Select.2006]

*Solución*:

**(a)** Expresemos la ecuación de la recta $r$ en forma paramétrica.

$$x = y - 2 = \frac{z-3}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}$$

Elijamos un punto genérico, $C$, de la recta; tendrá de coordenadas ($\lambda$, $2+\lambda$, $3+2\lambda$).

Impongamos la condición a este punto $C$ de estar a igual distancia de los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 4, 1)$: dist (A, $C$) = dist (B, $C$) $\rightarrow$

$$\sqrt{(\lambda-2)^2+(2+\lambda-1)^2+(3+2\lambda-2)^2} = \sqrt{(\lambda-0)^2+(2+\lambda-4)^2+(3+2\lambda-1)^2}$$

$$\sqrt{(\lambda-2)^2+(1+\lambda)^2+(1+2\lambda)^2} = \sqrt{\lambda^2+(\lambda-2)^2+(2+2\lambda)^2}$$

$$\sqrt{\lambda^2+4-4\lambda+1+\lambda^2+2\lambda+1+4\lambda^2+4\lambda} = \sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4-4\lambda+4+4\lambda^2+8\lambda}$$

$$\sqrt{6\lambda^2+2\lambda+6} = \sqrt{6\lambda^2+4\lambda+8} \quad \Rightarrow \quad 6\lambda^2+2\lambda+6 = 6\lambda^2+4\lambda+8 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda+6 = 4\lambda+8 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = -1 \quad \rightarrow \quad C\,(\lambda, 2+\lambda, 3+2\lambda) \quad \rightarrow \quad C\,(-1,\ 2-1, 3+2(-1)) \quad \rightarrow \quad \boxed{C\,(-1, 1, 1).}$$

**(b)** Obtengamos las coordenadas de los vectores $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ antes de calcular el área del triángulo $ABC$.

$$\vec{AC} = (-1,\ 1,\ 1) - (2,\ 1,\ 2) = (-3,\ 0,\ -1) \quad ; \quad \vec{BC} = (-1,\ 1,\ 1) - (0,\ 4,\ 1) = (-1,\ -3,\ 0)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{AC}\times\vec{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-3,\ 0,\ -1)\times(-1,\ -3,\ 0)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(-3,\ 1,\ 9)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+1^2+9^2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{91}\ \text{u}^2.}$$

---

9. Halla la perpendicular común a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = 2+2\beta \\ z = 0 \end{cases}$$

[Select. 2003]

_Solución_

Sean $A$ y $B$ puntos genéricos de $r$ y $s$, respectivamente, impongamos la condición de que el vector, $\vec{AB}$, que determinan ambos puntos sea perpendicular a las rectas $r$ y $s$ y por tanto a sus respectivos vectores de dirección.

Elijamos dichos puntos genéricos, $A=(1+\alpha,\ \alpha,\ -\alpha)$ de $r$ y $B=(\beta,\ 2+2\beta,\ 0)$ de $s$.

Construimos el vector $\vec{AB}$ que determinan ambos puntos:

$$\vec{AB}=(\beta,\ \ 2+2\beta,\ \ 0)-(1+\alpha,\ \alpha,\ -\alpha)=(\beta-1-\alpha,\ \ 2+2\beta-\alpha,\ \ \alpha)$$

y le imponemos la condición de que sea perpendicular a cada uno de los vectores de dirección de las rectas, lo que implica que el respectivo producto escalar sea cero:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}\bullet\vec{u}_r=0\\ \vec{AB}\bullet\vec{v}_s=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}(\beta-1-\alpha,\ \ 2+2\beta-\alpha,\ \ \alpha)\bullet(1,\ \ 1,\ \ -1)=0\\ (\beta-1-\alpha,\ \ 2+2\beta-\alpha,\ \ \alpha)\bullet(1,\ \ 2,\ \ 0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\beta-1-\alpha+2+2\beta-\alpha-\alpha=0\\ \beta-1-\alpha+4+4\beta-2\alpha=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}-3\alpha+3\beta=-1\\ -3\alpha+5\beta=-3\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}3\alpha-3\beta=1\\ -3\alpha+5\beta=-3\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{r}2\beta=-2\Rightarrow\beta=-1\\ 3\alpha-3\cdot(-1)=1\Rightarrow\alpha=-2/3\end{array}$$

El punto $B$ tiene de coordenadas: $B=(\beta,\ 2+2\beta,\ 0)=(-1,\ 2+2(-1),\ \ 0)=(-1,\ 0,\ 0)$, y el vector $\vec{AB}$, las siguientes:

$$\vec{AB}=(\beta-1-\alpha,\ 2+2\beta-\alpha,\ \alpha)=\left(-1-1-\left(-\frac{2}{3}\right),\ 2+2(-1)-\left(-\frac{2}{3}\right),\ -\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)\|(-2,1,-1)$$

La ecuación de la recta perpendicular común será:

$$r:\begin{cases}x=-1-2\lambda\\ y=\qquad\lambda\\ z=\quad-\lambda\end{cases}$$

---

10. Sabiendo que las rectas

$$r\equiv x=y=z\qquad y\qquad s\equiv\begin{cases}x=1+\mu\\ y=3+\mu\\ z=-\mu\end{cases}$$

se cruzan, halla los puntos $A$ y $B$, de $r$ y $s$ respectivamente, que están a mínima distancia. [Junio 2003]

*Solución*

Expresemos en primer lugar la ecuación de la recta $r$ en forma paramétrica.

$$r\equiv x=y=z\quad\rightarrow\quad r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

Los puntos $A$ y $B$ de $r$ y $s$, respectivamente, que estén a mínima distancia serán aquellos que hagan que el vector, $\vec{AB}$, que determinan ambos puntos sea perpendicular a las rectas $r$ y $s$ y por tanto a sus respectivos vectores de dirección.

Elijamos dichos puntos genéricos, $A=(\lambda,\ \lambda,\ \lambda)$ de $r$ y $B=(1+\mu,\ 3+\mu,\ -\mu)$ de $s$.

Construimos el vector $\vec{AB}$ que determinan ambos puntos:

$$\vec{AB}=(1+\mu,\ \ 3+\mu,\ \ -\mu)-(\lambda,\ \lambda,\ \lambda)=(1+\mu-\lambda,\ \ 3+\mu-\lambda,\ \ -\mu-\lambda)$$

y le imponemos la condición de que sea perpendicular a cada uno de los vectores de dirección de las rectas, es decir, que el respectivo producto escalar sea cero:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}\bullet\vec{u}_r=0\\ \vec{AB}\bullet\vec{v}_s=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(1+\mu-\lambda,\ \ 3+\mu-\lambda,\ \ -\mu-\lambda)\bullet(1,\ \ 1,\ \ 1)=0\\ (1+\mu-\lambda,\ \ 3+\mu-\lambda,\ \ -\mu-\lambda)\bullet(1,\ \ 1,\ \ -1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}1+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda-\mu-\lambda=0\\ 1+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda+\mu+\lambda=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\mu-3\lambda=-4\\ 3\mu-\lambda=-4\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\mu-3\lambda=-4\\ -9\mu+3\lambda=12\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}-8\mu=8\Rightarrow\mu=-1\\ -1-3\lambda=-4\Rightarrow\lambda=1\end{array}$$

Luego los puntos que están a la mínima distancia son:

$$A=(\lambda,\lambda,\lambda)=\boxed{(1,1,1)}$$

$$B=(1+\mu,3+\mu,-\mu)=\boxed{(0,2,1)}$$

---

11. Determina el punto P de la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$ que equidista de los planos:

$$\pi_1\equiv x+y+z+3=0 \quad y \quad \pi_2\equiv\begin{cases}x=-3+\lambda\\ y=-\lambda+\mu\\ z=-6-\mu\end{cases}$$

[Junio 2003]

*Solución*

Un punto genérico de la recta es $P=(1+2\lambda,-1+\lambda,3\lambda)$.

Hallamos la ecuación general del plano $\pi_2$:

$$\begin{vmatrix}x+3 & 1 & 0\\ y & -1 & 1\\ z+6 & 0 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x+3+z+6+y=0\Rightarrow\pi_2:x+y+z+9=0$$

Imponemos la condición a ese punto *P* de estar a igual distancia de uno y otro plano, $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$

$$\frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+9|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\Rightarrow\frac{|6\lambda+3|}{\cancel{\sqrt{3}}}=\frac{|6\lambda+9|}{\cancel{\sqrt{3}}}\Rightarrow|6\lambda+3|=|6\lambda+9|$$

Esta última ecuación, al ser en valor absoluto, da lugar a dos ecuaciones:

$$6\lambda+3=6\lambda+9\ \Rightarrow 3=9\ \ \textit{no tiene sentido}$$

$$6\lambda+3=-6\lambda-9\ \Rightarrow 12\lambda=-12\Rightarrow\lambda=-1$$

Luego el punto P de la recta que está a igual distancia de ambos planos es:

$$P=(1+2\lambda,-1+\lambda,3\lambda)\xrightarrow{\lambda=-1}\boxed{P=(-1,-2,-3)}$$

---

12. Considera una recta $r$ y un plano $\pi$ cuyas ecuaciones, respectivamente, son

$$\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right\} \ (t\in\mathbb{R}) \qquad \left.\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right\} \ (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

**(a)** Estudia la posición relativa de la recta y el plano $\pi$.

**(b)** Dados los puntos *B* (4, 4, 4) y *C* (0, 0, 0), halla un punto *A* en la recta $r$ de manera que el triángulo formado por los puntos *A*, *B* y *C* sea rectángulo en *B*. [Select. 2003]

*Solución*

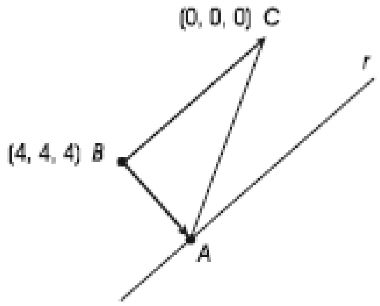
(a) Para estudiar la posición relativa de la recta y el plano dados, estudiamos la posición del vector director de la recta y el vector normal del plano:

$$r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} A=(0,0,0) \\ \vec{d}_r=(1,1,0) \end{cases} \qquad \pi:\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \pi:\begin{cases} B=(0,0,0) \\ \vec{n}_\pi=(1,1,0)\times(0,0,1)=\left(\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}\right)=(1,-1,0) \end{cases}$$

Observamos que la recta y el plano pasan por el origen de coordenadas, por tanto o la recta está contenida en el plano o se cortan en el punto (0,0,0).

Hacemos el producto escalar: $\vec{d}_r\cdot\vec{n}_\pi=(1,1,0)\cdot(1,-1,0)=1-1+0=0 \Rightarrow \vec{d}_r\perp\vec{n}_\pi$

Por tanto **la recta está contenida en el plano**.




**(b)** Elijamos un punto genérico de la recta $r$, por ejemplo, el punto *A* de coordenadas $(t, t, 0)$. [1]

Se verificará, al ser rectángulo en *B*, que $\vec{BA}\perp\vec{BC}$, lo que implica que el producto escalar de ambos vectores será cero:

$$\vec{BA}=(t,\ t,\ 0)-(4,\ 4,\ 4)=(t-4,\ t-4,\ -4)$$
$$\vec{BC}=(0,\ 0,\ 0)-(4,\ 4,\ 4)=(-4,\ -4,\ -4)$$

$$\vec{BA}\bullet\vec{BC}=0 \quad\Rightarrow\quad (t-4,\ t-4,\ -4)\bullet(-4,\ -4,\ -4)=0 \quad\Rightarrow$$
$$-4t+16-4t+16+16=0 \quad\Rightarrow\quad -8t=-48 \quad\Rightarrow\quad t=6$$

Sustituyendo este valor de $t = 6$ en [1] tendremos que las coordenadas del punto *A* que nos pide el problema serán: *A* (6, 6, 0).

---

13. Se sabe que los puntos *A*(1, 0, -1), *B*(3, 2, 1) y *C*(-7, 1, 5) son vértices consecutivos de un paralelogramo *ABCD*.

**(a)** Calcula las coordenadas del punto *D*.

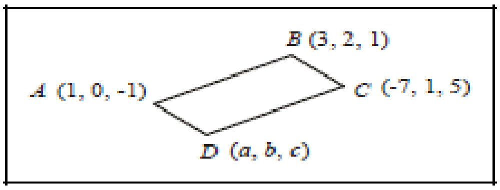
**(b)** Halla el área del paralelogramo. [Sept. 2003]

*Solución*

**(a)** Observando el dibujo deducimos que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (a,b,c)-(1,0,-1) = (a-1,b,c+1) \\ \overrightarrow{BC} = (-7,1,5)-(3,2,1) = (-10,-1,4) \end{cases} \Rightarrow$$




$$(a-1,b,c+1) = (-10,-1,4) \Rightarrow \begin{cases} a-1=-10 \\ b=-1 \\ c+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-9 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow D(-9,-1,3)$$

**(b)** El área del paralelogramo $ABCD$ será:

$$\text{Área} = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right|$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,2,1)-(1,0,-1) = (2,2,2) \\ \overrightarrow{AD} = (-9,-1,3)-(1,0,-1) = (-10,-1,4) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2,2,2)\times(-10,-1,4) = \left( \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} \right) = (10,-28,18)$$

$$\text{Área} = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right| = \left| (10,-28,18) \right| = \sqrt{10^2+(-28)^2+18^2} = \sqrt{1208} = 2\sqrt{302}\ \text{u}^2.$$

---

14. Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z=1 \\ y+z=-1 \end{cases}$ que está más cercano al punto P(1,-1,0).

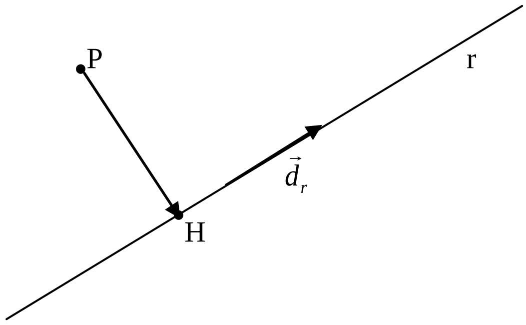
[Select. 2002]

*Solución*

Expresemos la ecuación de la recta en forma paramétrica para lo cual resolvemos el sistema tomando la z como incógnita no principal: $z=\lambda$

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \Rightarrow x+3(-1-\lambda)+\lambda=1 \Rightarrow x=4+2\lambda \\ y=-1-\lambda \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=-1-\lambda \Rightarrow \vec{d}_r=(2,-1,1) \\ z=\quad\ \lambda \end{cases}$$




Para calcular el punto de la recta $r$ que esté más cercano al punto $P(1,-1,0)$, elegiremos un punto genérico de la recta, por ejemplo, $H=(4+2\lambda, -1-\lambda, \lambda)$, que satisfaga la condición siguiente:

El vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular al vector de dirección de r, es decir, al vector (2, -1, 1).

$$\overrightarrow{PH} = (4+2\lambda, -1-\lambda, \lambda)-(1,-1,0) = (3+2\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$\overrightarrow{PH} \perp \vec{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{PH} \bullet \vec{v_r} = 0 \Rightarrow (3+2\lambda, -\lambda, \lambda)\bullet(2,-1,1)=0 \Rightarrow$$

$$6+4\lambda+\lambda+\lambda=0 \Rightarrow 6\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-1$$

Utilicemos este valor para obtener las coordenadas del punto $H$ de $r$ más cercano a $P$.

$$H=(4+2\lambda, -1-\lambda, \lambda)=(4+2(-1), -1-(-1), -1)=(2, 0, -1)$$

---

15. Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas $r$ y $s$ definidas respectivamente por $x-1=y-2=\dfrac{z-1}{-2}$, $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$. [Select. 2000]

*Solución*

Las ecuaciones de las rectas $r$ y $s$ en forma paramétrica son:

$$r=\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 1-2\alpha \end{cases} \qquad s=\begin{cases} x = 4-\beta \\ y = -1+3\beta \\ z = 2\beta \end{cases}$$

Elijamos de la recta $r$ un punto genérico, P, de coordenadas P(1+α, 2+α, 1-2α); y de la recta $s$ otro, H, de coordenadas H(4-β, -1+3β, 2β).

Se ha de verificar que el vector $\overrightarrow{PH}$ que determinan estos dos puntos genéricos, ha de ser perpendicular al vector de dirección de cada una de las rectas, y por tanto, los productos escalares respectivos serán cero:

$$\overrightarrow{PH}=(4-\beta,\ -1+3\beta,\ 2\beta)-(1+\alpha,\ 2+\alpha,\ 1-2\alpha)=(3-\beta-\alpha,\ -3+3\beta-\alpha,\ -1+2\beta+2\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PH}\perp\vec{u}_r \Rightarrow \overrightarrow{PH}\bullet\vec{u}_r=0 \Rightarrow (3-\beta-\alpha,\ -3+3\beta-\alpha,\ -1+2\beta+2\alpha)\bullet(1,1,-2)=0 \\ \overrightarrow{PH}\perp\vec{v}_s \Rightarrow \overrightarrow{PH}\bullet\vec{v}_s=0 \Rightarrow (3-\beta-\alpha,\ -3+3\beta-\alpha,\ -1+2\beta+2\alpha)\bullet(-1,3,2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 3-\beta-\alpha-3+3\beta-\alpha+2-4\beta-4\alpha=0 \\ -3+\beta+\alpha-9+9\beta-3\alpha-2+4\beta+4\alpha=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -6\alpha-2\beta=-2 \\ 2\alpha+14\beta=14 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3\alpha-\beta=-1 \\ \alpha+7\beta=7 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3\alpha-\beta=-1 \\ 3\alpha+21\beta=21 \end{cases}$$

$$20\beta=20 \Rightarrow \beta=1,\quad -3\alpha-1=-1\Rightarrow\alpha=0$$

La ecuación de la recta que se apoya perpendicularmente en $r$ y $s$, es la recta que pasa por el punto, por ejemplo, el P; y tiene como vector de dirección el vector $\overrightarrow{PH}$, es decir:

$$P(1+\alpha,\ 2+\alpha,\ 1-2\alpha) \Rightarrow P(1+0,\ 2+0,\ 1-2\cdot 0) \Rightarrow P(1,\ 2,\ 1)$$

$$\overrightarrow{PH}=(3-\beta-\alpha,\ -3+3\beta-\alpha,\ -1+2\beta+2\alpha)=(3-1-0,\ -3+3-0,\ -1+2+0)=(2,\ 0,\ 1)$$

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2 \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

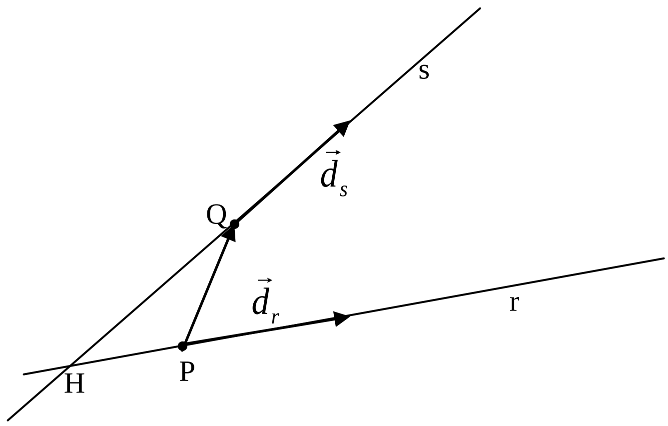
---

16. Sabiendo que las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \end{cases} \quad y \quad s\equiv\begin{cases} x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{cases}$$

se cortan, determina $a$ y el punto de corte.

[Select. 2002]




*Solución*

Según el dibujo las recta r y s se cortan si los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, donde P y Q son dos puntos cualesquiera de las rectas r y s respectivamente. Hallemos un punto y la dirección de cada recta:

$$\left[\begin{array}{l} r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \quad ,Si\ \ y=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \quad 2+0-z=1 \Rightarrow z=1 \Rightarrow P(2,0,1) \\ \vec{d}_r=(1,1,-1)\times(1,-1,0)=\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)=(-1,-1,-2)\,||\,(1,1,2) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} s:\begin{cases} x-2y-z=a \\ 2x+z=a \quad ,Si\ \ x=0 \Rightarrow z=a \end{cases} \quad 0-2y-a=a \Rightarrow -2y=2a \Rightarrow y=-a \Rightarrow Q(0,-a,a) \\ \vec{d}_s=(1,-2,-1)\times(2,0,1)=\left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right)=(-2,-3,4) \end{array}\right.$$

Los vectores $\vec{d}_r=(1,1,2),\ \vec{d}_s=(-2,-3,4)\ \ y\ \overrightarrow{PQ}=(-2,-a,a-1)$ para que sean linealmente dependientes o coplanarios se ha de cumplir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -2 & -a & a-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -3a+3-8+4a-12+4a+2a-2=0 \Rightarrow 7a-19=0 \Rightarrow \boxed{a=19/7}$$

Para encontrar el punto de corte resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \\ x-2y-z=19/7 \\ \cancel{2x+z=19/7} \end{cases} \quad \text{al ser S.C.D. eliminamos una ecuación no principal.}$$

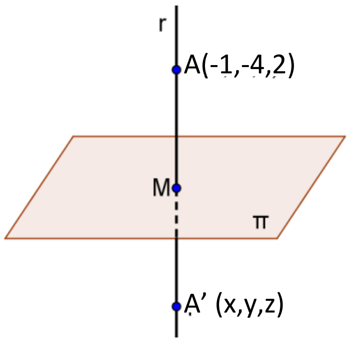
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+2y+z=-19/7 \end{cases} \qquad 10/7-4/7-z=1 \Rightarrow -z=1-6/7,\ \ z=-1/7$$

$$3y \quad =-12/7 \quad \Rightarrow y=-4/7, \quad x+4/7=2 \Rightarrow x=2-4/7,\ x=10/7$$

Por tanto se cortan en el punto $\boxed{H=\left(\frac{10}{7},\frac{-4}{7},\frac{-1}{7}\right)}$

---

17. Considera el plano $\pi$: $x-y+2z=3$ y el punto *A*(-1,-4,2)
    a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por *A.*
    b) Halla el punto simétrico de *A* respecto de $\pi$.
    [Sept. 2002]




*Solución*

a) Una recta perpendicular al plano $\pi$ tendrá como vector dirección al vector normal del plano. Luego la recta r que da determinada por:

$$r:\begin{cases} A(-1-4,2)\in r \\ \vec{d}_r=\vec{n}_\pi=(1,-1,2) \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$$

b) Para determinar el punto simétrico A' del punto A respecto del plano, vamos hallar el punto $M=r\cap\pi$ , y que ha de ser punto medio del segmento AA'. Se toma un punto genérico de la recta

$M=(-1+\lambda,-4-\lambda,2+2\lambda)\in\pi$ $\Rightarrow$ Le imponemos la condición de pertenecer al plano, o sea ha de verificar su ecuación:

$$-1+\lambda-(-4-\lambda)+2(2+2\lambda)=3\Rightarrow-1+\lambda+4+\lambda+4+4\lambda=3\Rightarrow6\lambda=3-7\Rightarrow\lambda=-4/6=-2/3$$

$$M=\left(-1-\frac{2}{3},-4+\frac{2}{3},2+2\frac{-2}{3}\right)=\left(\frac{-5}{3},\frac{-10}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Sea $A'(x,y,z)$. Al ser M el punto medio del segmento AA', se cumple:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-1+x}{2}=\dfrac{-5}{3}\Rightarrow x=\dfrac{-10}{3}+1=\dfrac{-7}{3}\\ \dfrac{-4+y}{2}=\dfrac{-10}{3}\Rightarrow y=\dfrac{-20}{3}+4=\dfrac{-8}{3}\\ \dfrac{2+z}{2}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow z=\dfrac{4}{3}-2=\dfrac{-2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{A'=\left(\frac{-7}{3},\frac{-8}{3},\frac{-2}{3}\right)}$$

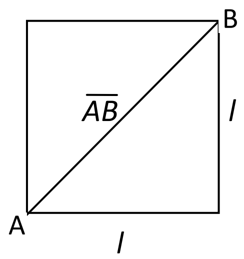
---

18. Los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(-1, 0, -2)$ son vértices opuestos de un cuadrado:
   **(a)** Calcula el área del cuadrado.
   **(b)** Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos A y B que pasa por su punto medio.

[Sept. 2002]

*Solución*

(a) El vector $\overrightarrow{AB}=(-2,0,-4)$ es la diagonal del cuadrado, su longitud es su módulo, y aplicando el teorema de Pitágoras:




$$l^2+l^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\Rightarrow2l^2=\left|(-2,0,-4)\right|^2\Rightarrow2l^2=\left(\sqrt{(-2)^2+0^2+(-4)^2}\right)^2$$

$$2l^2=20\Rightarrow l^2=10$$

Como el área del cuadrado es $l^2$: $A_C=l^2=\boxed{10\ u^2}$

(b) El punto medio del segmento AB es:

$M=\left(\dfrac{1+(-1)}{2},\dfrac{0+0}{2},\dfrac{2+(-2)}{2}\right)=(0,0,0)$. Por tanto el plano que se pide pasa por M y como vector normal del mismo podemos tomar el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\pi:\begin{cases}P=(0,0,0)\\ \vec{n}_\pi=\overrightarrow{AB}=(-2,0,-4)\,||\,(1,0,2)\end{cases}\qquad \pi:x+2z+k=0,\ P\in\pi\Rightarrow0+2\cdot0+k=0\Rightarrow k=0$$

$$\boxed{\pi:x+2z=0}$$

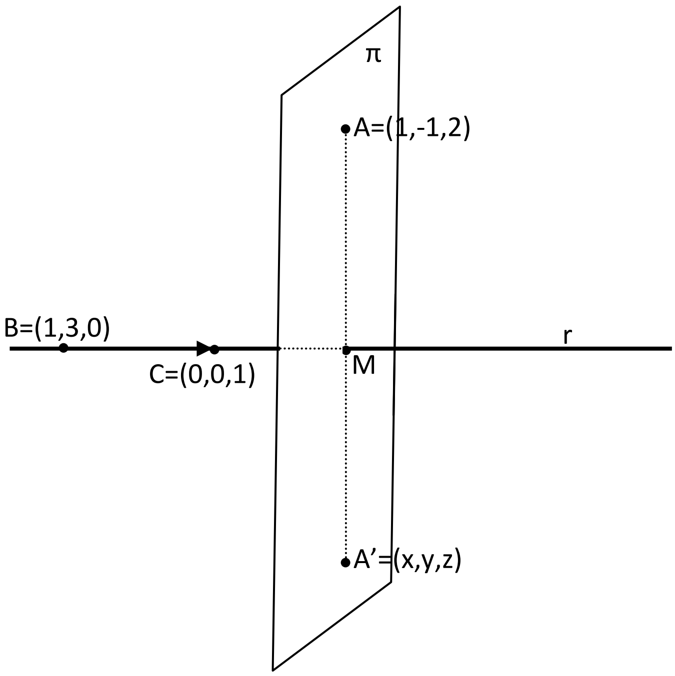
---

19. Considera los puntos $A(1,-1,2)$, $B(1,3,0)$ y $C(0,0,1)$. Halla el punto simétrico de $A$ respecto de la recta que pasa por $B$ y $C$.

[Select. 2002]

*<u>Solución</u>*

(a) El vector $\overrightarrow{BC}=(-1,-3,1)$ marca la dirección de la recta que pasa por los puntos B y C, luego su ecuación en paramétricas es: $r:\begin{cases} x=-\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$




Se traza un plano perpendicular a la recta r y que pase por A. Comol vector normal del plano π podemos tomar el vector $\overrightarrow{BC}=(-1,-3,1)$

$$\pi: -1(x-1)-3(y+1)+1(z-2)=0 \Rightarrow$$
$$-x+1-3y-3+z-2=0 \Rightarrow -x-3y+z-4=0$$

El punto de corte entre la recta y el plano va a ser el punto medio del segmento AA', siendo A' el punto simétrico de A respecto de la recta según el dibujo:

Tomando M como un punto genérico de la recta, le imponemos la condición de pertenecer al plano:

$$M=(-\lambda,-3\lambda,1+\lambda)\in\pi \Rightarrow \lambda+9\lambda+1+\lambda-4=0 \Rightarrow 11\lambda=3 \Rightarrow \lambda=3/11$$
$$M=\left(\frac{-3}{11},\frac{-9}{11},\frac{14}{11}\right)$$

Al ser M el punto medio del segmento AA', se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1+x}{2}=\dfrac{-3}{11} \Rightarrow x=\dfrac{-6}{11}-1=\dfrac{-17}{11} \\ \dfrac{-1+y}{2}=\dfrac{-9}{11}-4 \Rightarrow y=\dfrac{-18}{11}+1=\dfrac{-7}{11} \\ \dfrac{2+z}{2}=\dfrac{14}{11} \Rightarrow z=\dfrac{28}{11}-2=\dfrac{6}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A'=\left(\frac{-17}{11},\frac{-7}{11},\frac{6}{11}\right)}$$

20. Considera los puntos *A*(1, -3, 2), *B*(1, 1, 2) y *C*(1, 1, -1).

**(a)** ¿Pueden ser *A*, *B* y *C* vértices consecutivos de un rectángulo? Justifica la respuesta.

**(b)** Halla si es posible, las coordenadas de un punto *D* para que el paralelogramo *ABCD* sea un rectángulo.

[Selectividad 2003]

*Solución:*

**(a)** Los puntos *A*, *B* y *C* serán vértices consecutivos de un rectángulo si se verifica que el vector que determinan *A* y *B*, $\overrightarrow{AB}$, y el vector que forman *B* y *C*, $\overrightarrow{BC}$, son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ 2) - (1, -3, 2) = (0,\ 4,\ 0) \quad ; \quad \overrightarrow{BC} = (1,\ 1, -1) - (1, 1, 2) = (0,\ 0,\ -3)$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 4, 0) \bullet (0, 0, -3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

luego los puntos *A*, *B* y *C* sí pueden ser vértices consecutivos de un rectángulo.

**(b)** Para calcular un punto *D* de manera que forme con los puntos *A*, *B* y *C* un rectángulo procederemos de la siguiente forma.


Imponemos la condición de que los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ han de ser iguales:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (0,0,-3) \\ \overrightarrow{AD} = (a-1, b+3, c-2) \end{cases} \Rightarrow (0,0,-3) = (a-1, b+3, c-2)$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \Rightarrow \boxed{D = (1,-3,-1)} \\ c = -1 \end{cases}$$