EJERCICIOS RESUELTOS – INTEGRALES DEFINIDAS

ACTIVIDADES DE REPASO

16. Calcula $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4x+3}dx$. ¿Qué representa geométricamente? [Select. 2000]

1. Solución

Es una integral racional definida.
Calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+4x+3=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}= \begin{cases} \nearrow -1 \\ \searrow -3 \end{cases}$$

Descompongamos la fracción del integrando en fracciones elementales:

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

$$1=A(x+3)+B(x+1) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=-1 \;\Rightarrow\; 1=A(-1+3)+0 \;\Rightarrow\; A=\frac{1}{2} \\ x=-3 \;\Rightarrow\; 1=0+B(-3+1) \;\Rightarrow\; B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}=\int_0^2 \frac{1/2}{x+1}dx+\int_0^2 \frac{-1/2}{x+3}dx=\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x+1\right|\right]_0^2-\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x+3\right|\right]_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|2+1\right|-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|0+1\right|-\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|2+3\right|-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|0+3\right|\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(3)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1)-\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(5)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(3)\right]=\mathrm{Ln}(3)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(5)$$

Geométricamente representa el área de la región limitada por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos de abscisa 0 y 2. En este caso es así, porque para los valores que van desde 0 a 2, la función se conserva positiva, es decir, su gráfica queda por encima del eje de abscisas, debido a que el denominador sólo toma valores positivos para dichos valores.

---

17. Considera la integral definida $I=\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

a) Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variable $1+\sqrt{x}=t$. Calcula *I* [Select. 2004]

Solución

(a) Hagamos el cambio de variable $1+\sqrt{x}=t$, al diferenciar esta expresión tendremos:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \;\Rightarrow\; dx=2\sqrt{x}\,dt \;\Rightarrow\; dx=2(t-1)\,dt$$

Los límites de integración quedarán modificados así:

si $x=1 \Rightarrow 1+\sqrt{1}=t \Rightarrow \quad t=2$; si $x=9 \Rightarrow 1+\sqrt{9}=t \Rightarrow \quad t=4$

La expresión de la integral con motivo de este cambio será:

$$I=\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int_2^4 \frac{1}{t}\,2\,(t-1)\,dt$$

(b) Calculemos I.

$$I=\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int_2^4 \frac{1}{t}\,2\,(t-1)\,dt=\int_2^4 \frac{2t-2}{t}\,dt=\int_2^4\left(\frac{2t}{t}-\frac{2}{t}\right)dt=\int_2^4\left(2-\frac{2}{t}\right)dt=$$

$$=\left[2t-2\,\mathrm{Ln}(t)\right]_2^4=\left(2\times 4-2\,\mathrm{Ln}(4)\right)-\left(2\times 2-2\,\mathrm{Ln}(2)\right)=8-2\,\mathrm{Ln}(2^2)-4+2\,\mathrm{Ln}(2)=$$

$$=8-4\,\mathrm{Ln}(2)-4+2\,\mathrm{Ln}(2)=4-2\,\mathrm{Ln}(2)=4-\mathrm{Ln}(4)$$

---

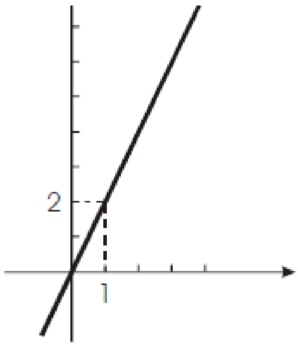
18. Calcula el área del recinto limitado por la recta $y=2x$ y por las curvas $y=x^2$ e $y=\frac{x^2}{2}$.

[Sept. 2004]

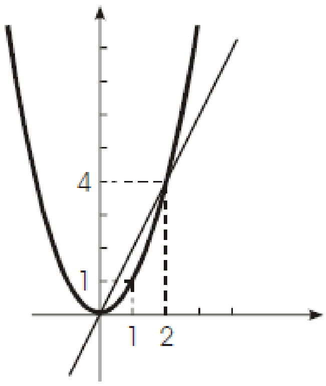
<u>Solución</u>

Antes de calcular el área del recinto vamos a dibujarlo.

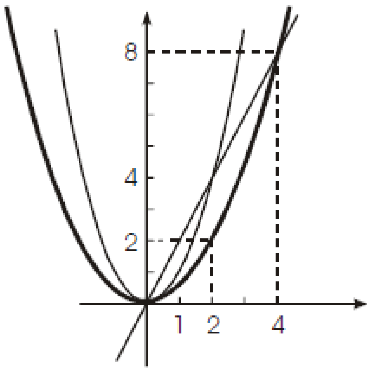
La gráfica de la función lineal $y=2x$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas; otro punto, por ejemplo, sería el (1, 2). La representación gráfica está situada al lado.



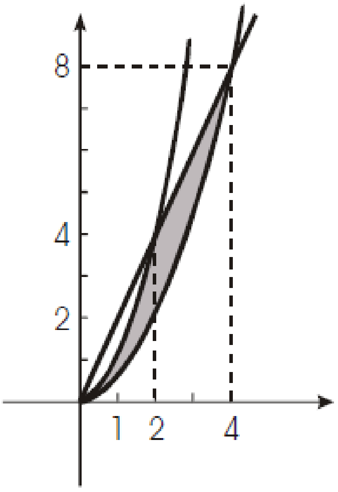
La gráfica de la función cuadrática elemental $y=x^2$ es una parábola cuyo vértice pasa por el origen de coordenadas. Otros dos puntos, por ejemplo, serían el (1, 1) y el (2, 4). La representación gráfica es la situada al lado, juntamente con la anterior.



La gráfica de la función cuadrática $y=\frac{x^2}{2}$ es una parábola cuyo vértice pasa por el origen de coordenadas. Al ser el coeficiente de x^2, $\frac{1}{2}<1$, la parábola es más abierta que la anterior. Otros dos puntos, por ejemplo, serían el (2, 2) y el (4, 8). La representación gráfica es la situada al lado, juntamente con las anteriores.



El recinto limitado por las tres



gráficas es el que se encuentra sombreado y situado al lado. Para calcular su área, hay que calcular previamente los puntos de intersección de la recta con cada una de las parábolas.

Intersección de la recta con la función $y=x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=2x \;\Rightarrow\; x^2-2x=0 \;\Rightarrow\; x(x-2)=0 \;\Rightarrow \\ x=0 \;\;;\;\; x=2 \end{array}\right.$$

Intersección de la recta con la función $y=\dfrac{x^2}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{2}=2x \;\Rightarrow\; x^2-4x=0 \;\Rightarrow\; x(x-4)=0 \;\Rightarrow \\ x=0 \;\;;\;\; x=4 \end{array}\right.$$

El área del recinto acotado por la recta y por las dos curvas será:

$$\text{Área} = \int_0^2\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx + \int_2^4\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2 + \left[\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_2^4 =$$

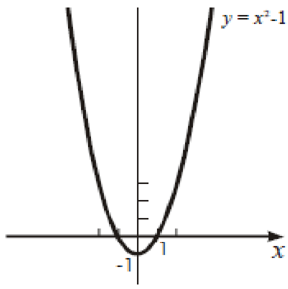
$$=\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{6}\right)-\left(\frac{0}{3}-\frac{0}{6}\right)+\left(16-\frac{64}{6}\right)-\left(4-\frac{8}{6}\right)=\frac{4}{3}-0+\frac{16}{3}-\frac{8}{3}=4 \text{ u.}^2$$

---

19. Haz un esbozo de recinto limitado por las curvas $y=\dfrac{15}{1+x^2}$ e $y=x^2-1$. Calcula el área de dicho recinto. [Select. 2006]

Solución

(a) La gráfica de la función $y=x^2-1$, es una parábola que podemos dibujar fácilmente a partir de la de x^2 desplazando ésta una unidad hacia abajo. Los puntos de corte con el eje de abscisas, serían:



$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2-1=0 \;\Rightarrow\; x=\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (-1,\ 0) \\ (1,\ 0) \end{array}\right.$$

y con el eje de ordenadas el $(0,-1)$.

La gráfica se encuentra situada al lado.

Estudiemos más detenidamente la gráfica de la función racional $y=\dfrac{15}{1+x^2}$.

El dominio es todo $\mathbb{R}$ ya que no hay ningún valor que anule al denominador.

Si observamos la función se trata de una función par, es decir, simétrica respecto del eje de ordenadas, veámoslo:

$$\forall x\in \mathrm{R} \;\Rightarrow\; -x\in \mathrm{R}$$

$$f(x)=\frac{15}{1+x^2} \;\Rightarrow\; f(-x)=\frac{15}{1+(-x)^2} \;\Rightarrow\; f(-x)=\frac{15}{1+x^2}=f(x)$$

Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $1+x^2=0$, pero no hay ningún valor que lo anule, luego no hay asíntota vertical.

Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{15}{1+x^2} = \left[\frac{15}{\infty}\right] = 0$$

luego hay una asíntota horizontal, $y=0$, cuando x tiene a $\pm\infty$.

En las funciones racionales si existe asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

Estudiemos la posición de la gráfica de f respecto de la asíntota horizontal $y=0$, cuando x tiene a $-\infty$.

* Para valores de x muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000 \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{15}{1+1000^2} = 0.00001499... \\ y_{\text{asíntota}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de esta función racional, para $x \to -\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

Por la simetría respecto al eje de ordenadas, ocurre lo mismo cuando $x \to +\infty$.

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, obtengamos la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{-15\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-30x}{(1+x^2)^2}$$

Hallemos los valores que anulen a esta primera derivada.

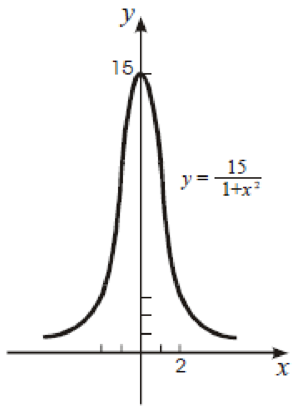
$$\frac{-30x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -30x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Sólo hay un valor que anule a la primera derivada, el $x=0$, y como el dominio de la función es $\mathbb{R}$, esto nos permite construir los siguientes intervalos de monotonía: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

Probemos valores intermedios, por ejemplo, -1 y 1, respectivamente de cada uno de esos intervalos en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, el intervalo correspondiente será creciente o decreciente:

$$f'(-1) = \frac{-30\cdot(-1)}{(1+(-1)^2)^2} = \frac{30}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } (-\infty, 0)$$

$$f'(1) = \frac{-30\cdot 1}{(1+1^2)^2} = \frac{-30}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } (0, +\infty)$$



Teniendo en cuenta lo anterior y el hecho de ser una función racional continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$, podemos deducir que en el punto $x=0$, la función presenta un máximo relativo, el $(0, 15)$. Donde la ordenada, 15, se obtiene sustituyendo la abscisa 0 en la función.

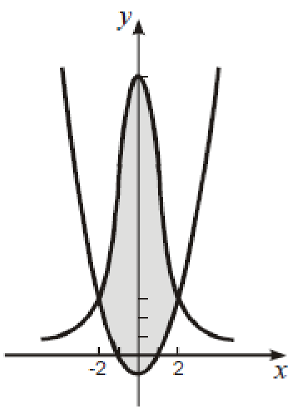
La gráfica se encuentra dibujada al lado.

Para encontrar el recinto limitado por ambas curvas, calculemos el punto donde ambas curvas se cortan.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{15}{1+x^2} \\ y = x^2 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{15}{1+x^2} = x^2 - 1 \Rightarrow \; 15 = (x^2-1)(1+x^2) \Rightarrow$$

$$15 = x^4 - 1 \Rightarrow \quad x^4 = 16 \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt[4]{16} \Rightarrow \quad x = \pm 2 \quad \Rightarrow \begin{cases} (0,\ -2) \\ (0,\ 2) \end{cases}$$



El recinto limitado por ambas gráficas se encuentra sombreado al lado.

(b) Calculemos el área del recinto anterior, para ello construimos la función diferencia:

$$h(x)=\frac{15}{1+x^2}-\left(x^2-1\right) \Rightarrow h(x)=\frac{15}{1+x^2}-x^2+1$$

Obtengamos los puntos de corte de esta función con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=\dfrac{15}{1+x^2}-x^2+1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{15}{1+x^2}-x^2+1=0 \Rightarrow \frac{15-x^4+1}{1+x^2}=0 \Rightarrow$$

$$15-x^4+1=0 \Rightarrow x^4=16 \Rightarrow x=\pm 2$$

Como podemos comprobar, en este caso, no era preciso su cálculo por cuanto estos valores coinciden lógicamente con los puntos de corte de ambas gráficas, calculados en el apartado anterior, y representados igualmente en el dibujo del recinto limitado por dichas gráficas.

$$\text{Área}=\int_{-2}^{2} h(x)\,dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{15}{1+x^2}-x^2+1\right)dx=\left[15\,arctan\,(x)-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=15\,arctan\,(2)-\frac{2^3}{3}+2-\left(15\,arctan\,(-2)-\frac{(-2)^3}{3}-2\right)=$$

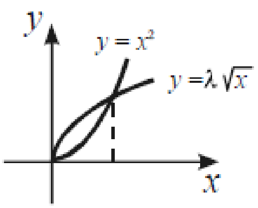
$$=15\,arctan\,(2)-15\,arctan\,(-2)-\frac{8}{3}+2-\frac{8}{3}+2=15\,arctan\,(2)-15\,arctan\,(-2)-\frac{4}{3}=$$

$$=15\,arctan\,(2)+15\,arctan\,(2)-\frac{4}{3}=30\,arctan\,(2)-\frac{4}{3}\quad u^2.$$

---

20. Sean las funciones f y $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, dadas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=\lambda\sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcula el valor de λ sabiendo que el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es 1/3. [Select. 2006]

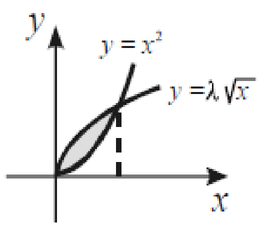
Solución



Las gráficas de las funciones *f* y *g* están representadas de manera aproximada al lado, ya que se trata de dos funciones prácticamente elementales.

Calculemos el punto de corte de ambas gráficas, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=\lambda\sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=\lambda\sqrt{x} \Rightarrow x^4=\lambda^2 x \Rightarrow x^4-\lambda^2 x=0 \Rightarrow x\left(x^3-\lambda^2\right)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x^3-\lambda^2=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{\lambda^2} \end{array}\right.$$



El área del recinto limitado por ambas gráficas y que se encuentra sombreado en el dibujo es $\frac{1}{3}$, por tanto, se verificará:

$$\text{Área}=\int_{0}^{\sqrt[3]{\lambda^2}}\left(\lambda\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left[\frac{\lambda\, x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt[3]{\lambda^2}}=\frac{\lambda\left(\sqrt[3]{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{\left(\sqrt[3]{\lambda^2}\right)^3}{3}-0=$$

$$= \frac{2}{3}\lambda \cdot \lambda^{\frac{2}{3}\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\lambda^2 = \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda^2 = \frac{1}{3}\lambda^2$$

y teniendo en cuenta cuánto vale esta área: $\frac{1}{3}\lambda^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Luego el valor de λ es 1 ya que según el ejercicio debe ser un número real positivo.

---

21. Considera la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x|$.

a) Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de f y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior. [Select. 2004]

Solución

(a) Expresemos la función *f(x)* como una función a trozos.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ x \cdot x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Antes de pintar la gráfica de *f(x)* calculemos los puntos de corte de la misma con la bisectriz del primer y tercer cuadrante, $y = x$.

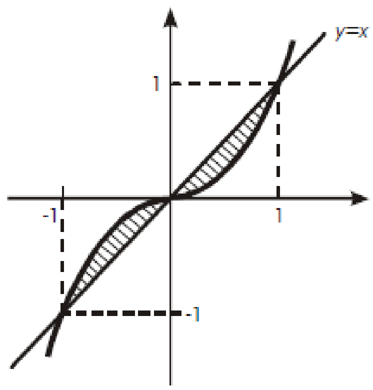
$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 = x \Rightarrow -x^2 - x = 0 \Rightarrow -x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Hemos obtenido dos puntos de corte con el trozo $y = -x^2$, el (0, 0) y el (-1, 0).

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Hemos obtenido dos puntos de corte con trozo, $y = x^2$, el (0, 0) y el (1, 0).

La región acotada que nos pide el ejercicio se corresponde con la zona rayada situada al lado, y donde hemos tenido en cuenta que los trozos de la gráfica de la función *f(x)* son dos parábolas elementales.



(b) El área de la región anterior es la siguiente.

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0}\left(x + x^2\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}\left(x - x^2\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right| =$$

$$= \left|0 - \left(\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3}\right)\right| + \left|\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 0\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\ \text{u.}^2$$

---

22. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = sen\, x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$. [Select. 2006]

<u>Solución</u>

Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x_0 = 0$.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x) = \text{sen}\, x \quad \to \quad f'(x) = \cos x \quad \to \quad f'(0) = \cos 0 \quad \to \quad f'(0) = 1$

$f(0) = \text{sen}\, 0 = 0$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \to \quad y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad \to \quad y - 0 = 1(x - 0) \quad \to \quad y = x$

Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x_1 = \pi$.

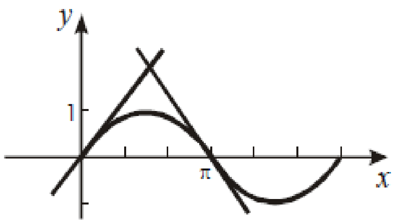
$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

$f(x) = \text{sen}\, x \quad \to \quad f'(x) = \cos x \quad \to \quad f'(\pi) = \cos \pi \quad \to \quad f'(\pi) = -1$

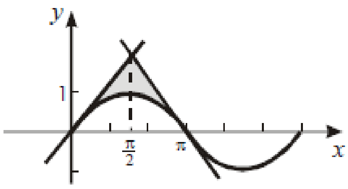
$f(\pi) = \text{sen}\, \pi = 0$

$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \quad \to \quad y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \quad \to \quad y - 0 = -1(x - \pi) \quad \to \quad y = -x + \pi$

Las gráficas de la función $f(x)$ = sen (x), que es una función elemental, y las de las rectas tangentes anteriores están situadas al lado.



El área del recinto que nos piden se encuentra sombreado en la gráfica de la izquierda.



Calculemos el punto donde ambas rectas tangentes se cortan.

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = -x - \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = -x - \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

El área del recinto, al darse una simetría bastará con calcular la mitad y multiplicarla por 2.

$$\text{Área} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \text{sen}\, x)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{(\pi/2)^2}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \left(\frac{0^2}{2} + \cos 0\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi^2}{8} + 0 - (0+1)\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad u^2$$

---

23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x & si \quad x < 0 \\ e^{-x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Determina el valor de α sabiendo que f es derivable.
b) Haz un esbozo de la gráfica de f.
c) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. [Select. 2007]

<u>Solución</u>

(a) Para estudiar la derivabilidad estudiemos previamente la continuidad.

- Para valores de $x<0$, la función $1+\alpha x$ es continua por ser una función polinómica ya que las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Para valores de $x > 0$, la función e^{-x} es continua por ser una función exponencial elemental que lo es en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x = 0$ la función será continua si los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} (1+\alpha\, x) = 1+\alpha\cdot 0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} e^{-x} = e^{-0} = 1 \\ f(0) = e^{-0} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \right.$$

luego la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto podrá ser derivable también en $\mathbb{R}$.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, en este caso no hay problemas al ser continua.

- Para valores de $x<0$, la función $1+\alpha x$ es derivable por ser una función polinómica, ya que las funciones polinómicas lo son en todo $\mathbb{R}$, siendo la función derivada, α.

- Para valores de $x>0$, la función e^{-x} es derivable en todo $\mathbb{R}$, por ser una función exponencial elemental, siendo la función derivada, $-e^{-x}$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad x<0 \\ -e^{-x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

El problema está en el punto 0. Será derivable en el punto 0, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$f'(0^-) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \alpha = \alpha$$

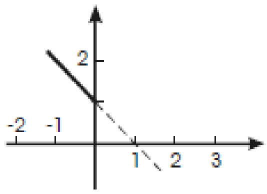
$$f'(0^+) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-e^{-x}\right) = -e^{-0} = -1$$

Igualando las derivadas laterales: $f'(0^-) = f'(0^+) \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$, podemos deducir que la función será derivable en el punto 0, si $\alpha = -1$, siendo el valor de la derivada -1.

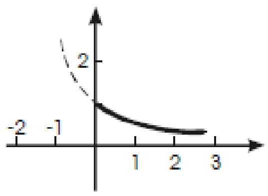
En definitiva, la función *f* será derivable si $\alpha = -1$, siendo la función derivada, finalmente:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ -e^{-x} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

(b) La función *f*, después de sustituir α por -1, es: $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

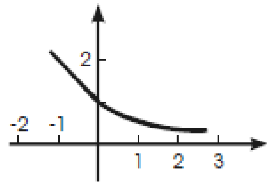


Representemos el primer trozo, $1-x$, para los valores de $x < 0$. se trata de una función afín cuya gráfica pasa por los puntos (0, 1) y (1, 0), que son los puntos de corte con los ejes, pero sólo nos quedaremos con el trozo de gráfica correspondiente a los valores de $x < 0$, y que hemos dibujado al lado.



El trozo, e^{-x}, es una función exponencial elemental, estrictamente decreciente, por ser la base, e^{-1}, un número menor que 1 y mayor que cero. La gráfica se encuentra representada a la izquierda.

La gráfica de *f(x)* es la situada a continuación.



(c) Calculemos la integral.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (1-x)\,dx + \int_{0}^{1} e^{-x}dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 =$$

$$= 0 - \frac{0^2}{2} - \left(-1 - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \left(-e^{-1} - \left(-e^{-0}\right)\right) = -\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-e^{-1} + 1\right) = \frac{5}{2} - e^{-1}$$