EJERCICIOS RESUELTOS – INTEGRALES INDEFINIDAS

5.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2 sen(2x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,1). [Select. 2005]

Solución

Calculemos la primitiva de *f(x)*.

$$F(x)=\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx$$

Se trata de una integral por partes.

$u=x^2 \qquad du=2x\,dx$

$dv=\operatorname{sen}(2x)\,dx \qquad v=\int dv=\int \operatorname{sen}(2x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)$

$$\int x^2\operatorname{sen}(2x)\,dx=\frac{-1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}\int 2x\cos(2x)\,dx=\frac{-1}{2}x^2\cos(2x)+\int x\cos(2x)\,dx=$$

La última integral es otra integral por partes, por lo que:

$u=x \qquad du=dx$

$dv=\cos(2x)\,dx \qquad v=\int dv=\int \cos(2x)\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x)-\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+\mathrm{K}$$

Obtengamos ahora la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (0,1), es decir, *F*(0)=1.

$$F(0)=-\frac{1}{2}\cdot 0^2\cdot\cos(2\cdot 0)+\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\operatorname{sen}(2\cdot 0)+\frac{1}{4}\cos(2\cdot 0)+\mathrm{K} \Rightarrow 1=\frac{1}{4}+\mathrm{K} \Rightarrow \mathrm{K}=\frac{3}{4}$$

La primitiva que se nos pide será: $\boxed{-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+\frac{3}{4}}$

7.- Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(1+x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas. [Junio 2007]

Solución

Hallemos, en primer lugar, la primitiva de *f*.

$$\int \mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)\,dx$$

Calcularemos la integral mediante el método de integración por partes, para lo cual aplicamos la fórmula siguiente: $\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du$

$u=\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) \qquad du=\frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$dv=dx \qquad v=\int dx=x$

$$\int \mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)dx=\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)\cdot x-\int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right)\cdot x-\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx= \quad [2]$$

La última integral es una integral racional impropia, por lo que efectuamos la división que se encuentra situada a la derecha, y continuamos a partir de [2].

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & 1+x^2 \\ \cline{2-2} -2x^2-2 & 2 \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

$$= x\cdot \text{Ln}\left(1+x^2\right) - \int\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx = x\cdot \text{Ln}\left(1+x^2\right) - 2x + 2\int\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\cdot \text{Ln}\left(1+x^2\right) - 2x + 2\cdot \text{arctg}(x) + C \qquad [3]$$

Obtengamos ahora la primitiva de *f* cuya gráfica pase por el origen de coordenadas, para ello sustituyamos las coordenadas (0, 0) en [3].

$$F(x) = x\cdot \text{Ln}\left(1+x^2\right) - 2x + 2\cdot \text{arctg}(x) + C \;\Rightarrow\; F(0)=0 \;\Rightarrow$$

$$F(0) = 0\cdot \text{Ln}\left(1+0^2\right) - 2\cdot 0 + 2\cdot \text{arctg}(0) + C \;\Rightarrow\; 0 = 0\cdot \text{Ln}(1) - 0 + 2\cdot \text{arctg}(0) + C \;\Rightarrow$$

$$0 = 2\cdot \text{arctg}(0) + C \;\Rightarrow\; 0 = 2\cdot\{0+K\pi\} + C \;\Rightarrow\; C = -2K\pi \quad ; \quad K\in Z$$

$$\boxed{F(x) = x\cdot \text{Ln}\left(1+x^2\right) - 2x + 2\cdot \text{arctg}(x) - 2K\pi \quad ; \quad K\in Z}$$

es decir, obtenemos no una primitiva sino toda una familia de primitivas cuyas gráficas pasan por el origen de coordenadas.

ACTIVIDADES DE REPASO

1. Determina una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x)=x^2+x-6$ y que el valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo). [Sept. 2007]

Solución

Si la función *f* es derivable en $\mathbb{R}$ también será continua en $\mathbb{R}$, ya que la derivabilidad implica continuidad.

La función *f* la obtendremos, en principio, mediante la integración de su función derivada:

$$f'(x) = x^2+x-6 \;\Rightarrow\; f(x) = \int\left(x^2+x-6\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+C$$

Para calcular el valor de C tendremos en cuenta que al ser la función continua y derivable en $\mathbb{R}$, los extremos relativos se encontrarán entre los valores que anulan a la primera derivada, y para distinguirlos sustituiremos estos valores que anulan a la primera derivada en la segunda derivada y según obtengamos un valor mayor o menor que cero, el extremo relativo será respectivamente mínimo o máximo.

$$f'(x) = x^2+x-6 \;\Rightarrow\; x^2+x-6=0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$f''(x) = 2x+1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(2) = 2\cdot 2+1 = 5>0 \;\Rightarrow\; \text{Mínimo en } x=2 \\ f''(-3) = 2\cdot(-3)+1 = -5<0 \;\Rightarrow\; \text{Máximo en } x=-3 \end{cases}$$

Impongamos ahora la condición que nos da el problema, de que valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo), es decir, que $f(-3)=3\cdot f(2) \;\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+C \;\Rightarrow\; \frac{(-3)^3}{3}+\frac{(-3)^2}{2}-6(-3)+C = 3\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}-6\cdot 2+C\right) \;\Rightarrow$$

$$\frac{-27}{3}+\frac{9}{2}+18+C=3\left(\frac{8}{3}+2-12+C\right) \Rightarrow 9+\frac{9}{2}+C=3\left(\frac{8}{3}-10+C\right) \Rightarrow$$

$$\frac{27}{2}+C=3\left(\frac{-22}{3}+C\right) \Rightarrow \frac{27}{2}+C=-22+3C \Rightarrow \frac{27}{2}+22=2C \Rightarrow C=\frac{71}{4}$$

La función *f* será:

$$\boxed{f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+\frac{71}{4}}$$

---

2. Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=x^2-1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=0 es la recta y=1. [Select. 2007]

Solución

Si la función segunda derivada es, $f''(x)=x^2-1$, la función primera derivada la obtendremos mediante integración.

$$f'(x)=\int\left(x^2-1\right)dx=\frac{x^3}{3}-x+C$$

Como la recta tangente a la gráfica de *f* en $x=0$ es la recta $y=1$, que es una recta paralela al eje de abscisas y por tanto de pendiente 0, lo que significa que la derivada de la función *f* en el punto 0 es cero, es decir, $f'(0)=0$, por tanto:

$$f'(x)=\frac{x^3}{3}-x+C \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow \frac{0^3}{3}-0+C=0 \Rightarrow C=0$$

luego la función primera derivada será:

$$f'(x)=\frac{x^3}{3}-x+C \Rightarrow f'(x)=\frac{x^3}{3}-x$$

La función *f* la obtendremos mediante integración de f'.

$$f(x)=\int\left(\frac{x^3}{3}-x\right)dx=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+K$$

Sabemos que la recta tangente a la gráfica de *f* en $x=0$ es la recta $y=1$, por tanto el punto de tangencia tiene de coordenadas (0, 1), esto implica que $f(0)=1$.

$$f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+K \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow \frac{0^4}{12}-\frac{0^2}{2}+K=1 \Rightarrow K=1 \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+1}$$

---

3. Calcula:

a) $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx$ b) $\int (2x-3)\cdot tg(x^2-3x)\,dx$ [Sept. 2006]

Solución

(a) Es una integral racional impropia (el grado del polinomio del numerador es igual que el del denominador) por lo que efectuamos la división.

$$\begin{array}{rrr|l} 5x^2 - x & - & 160 & x^2 - 25 \\ -5x^2 & + & 125 & 5 \\ \hline -x & - & 35 & \end{array}$$

La integral quedará así:

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx = \int \left(5 + \frac{-x-35}{x^2-25}\right) dx = \int 5\,dx + \int \frac{-x-35}{x^2-25}\,dx = 5x + \int \frac{-x-35}{x^2-25}\,dx = \qquad [1]$$

La última integral es una integral racional propia, por lo que calculamos las raíces del denominador.

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases}$$

Descompongamos la fracción del integrando en fracciones elementales:

$$\frac{-x-35}{x^2-25} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5} \Rightarrow \frac{-x-35}{x^2-25} = \frac{A(x+5)+B(x-5)}{(x+5)(x-5)}$$

$$-x - 35 = A(x+5) + B(x-5) \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \Rightarrow -5-35 = A(5+5)+0 \Rightarrow A = -4 \\ x = -5 \Rightarrow 5-35 = 0+B(-5-5) \Rightarrow B = 3 \end{cases}$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$= 5x + \int \left(\frac{-4}{x-5} + \frac{3}{x+5}\right) dx = 5x + \int \frac{-4}{x-5}dx + \int \frac{3}{x+5}dx = 5x - 4\int \frac{1}{x-5}dx + 3\int \frac{1}{x+5}dx =$$

$$= \boxed{5x - 4\cdot \mathrm{Ln}|x-5| + 3\cdot \mathrm{Ln}|x+5| + C}$$

(b) Para calcular la integral $\int (2x-3)\cdot \mathrm{tg}(x^2-3x)\,dx$ apliquemos el cambio de variable $x^2 - 3x = u$, diferenciando esta expresión obtendremos: $\begin{cases} x^2 - 3x = u \\ (2x-3)\,dx = du \end{cases}$ que sustituyendo en la integral, nos quedará

$$\int (2x-3)\cdot \mathrm{tg}(x^2-3x)\,dx = \int \mathrm{tg}(u)\,du = -\int \frac{-sen(u)}{\cos(u)}du = -Ln|\cos(u)| + C$$

y deshaciendo el cambio

$$= \boxed{-\mathrm{Ln}\left|\cos(x^2-3x)\right| + C}$$

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \cos(5x+1)dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}dx$ c) $\int_0^1 xe^{-3x}dx$ [Select. 2005]

<u>Solución:</u>

(a) Calculemos la siguiente integral.

$$\int \cos(5x+1)\, dx.$$

Es una integral casi inmediata, pero podemos hacerla mediante el método de sustitución.

$$\begin{cases} 5x+1 = t \\ 5\, dx = dt \end{cases}$$

$$\int \cos(5x+1)\, dx = \int \cos(t)\, \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \cos(t)\, dt = \frac{1}{5}\,\text{sen}(t) =$$

deshagamos el cambio realizado.

$$= \boxed{\frac{1}{5}\,\text{sen}(5x+1) + \text{K}}$$

(b) Calculemos esta otra integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\, dx.$$

La resolveremos mediante el método de sustitución.

$$\begin{cases} x+2 = t \\ dx = dt \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\, dt = \int t^{-\frac{3}{2}}\, dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{t}} =$$

deshagamos el cambio realizado.

$$= \boxed{-\frac{2}{\sqrt{x+2}} + \text{K}}$$

(c) Calculemos la siguiente integral, por el método de integración por partes.

$$\int_0^1 x\, e^{-3x}\, dx.$$

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$
$$dv = e^{-3x}\, dx \quad ; \quad v = \int dv = \int e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$\int_0^1 x\, e^{-3x}\, dx = \left[-\frac{1}{3}x\, e^{-3x}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-3x}\, dx = \left[-\frac{1}{3}x\, e^{-3x}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^1 (-3)\, e^{-3x}\, dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x\, e^{-3x}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9}\, e^{-3x}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\cdot 1\cdot e^{-3\cdot 1} - 0 + \left(-\frac{1}{9}\, e^{-3\cdot 1} - \left(-\frac{1}{9}\, e^{-3\cdot 0}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3} - \frac{1}{9}e^{-3} + \frac{1}{9}e^{0} = -\frac{4}{9}e^{-3} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{9} - \frac{4}{9}e^{-3}}$$

5. Calcula la integral $\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx$ [Select. 2005]

Solución

Calculemos la integral indefinida siguiente:

$$\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}\,dx.$$

Se trata de una integral racional impropia donde el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador por lo que efectuaremos la división indicada.

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^3+x^2-10x+1 & x^2-x-2 \\ \cline{3-3} & -3x^3+3x^2+6x & 3x+4 \\ \hline & 4x^2-4x+1 & \\ & -4x^2+4x+8 & \\ \hline & 9 & \end{array}$$

La integral anterior quedará así:

$$\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}\,dx = \int (3x+4)\,dx + \int \frac{9}{x^2-x-2}\,dx = [1]$$

la última integral sí es una integral racional propia, por lo que el integrando lo descompondremos en una suma de fracciones elementales para ello calcularemos los valores que anulan al denominador del integrando.

$$x^2-x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Descompongamos la fracción en fracciones elementales en función de sus raíces.

$$\frac{9}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{x^2-x-2}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)} \quad \Rightarrow$$

$$9 = A(x+1)+B(x-2) \quad \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \Rightarrow \quad 9=3A \quad \Rightarrow \quad A=3 \\ x=-1 & \Rightarrow \quad 9=-3B \quad \Rightarrow \quad B=-3 \end{cases}$$

Continuando desde [1], tendremos:

$$=3\frac{x^2}{2}+4x+\int\left(\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+1}\right)dx = \boxed{\frac{3}{2}x^2+4x+3\,\mathrm{Ln}|x-2|-3\,\mathrm{Ln}|x+1|+C}$$

---

6. De la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ se sabe que $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2)=0$

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,1). [Junio 2004]

Solución

(a) Calculemos primeramente el conjunto de todas las primitivas de $f'(x)$:

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{3}{(x+1)^2}\,dx=\int 3(x+1)^{-2}\,dx=3\frac{(x+1)^{-1}}{-1}=\frac{-3}{x+1}+K$$

De todas estas primitivas, $f(x)$, obtengamos la $f(x)$ tal que $f(2)=0$:

$$f(x)=\frac{-3}{x+1}+K \quad\Rightarrow\quad 0=\frac{-3}{2+1}+K \quad\Rightarrow\quad 0=-1+K \quad\Rightarrow\quad K=1$$

luego la primitiva que se nos pide es: $\boxed{f(x)=\dfrac{-3}{x+1}+1.}$

(b) Para hallar las primitivas de *f(x)*, integraremos la función *f(x)* obtenida anteriormente.

$$F(x)=\int\left(\frac{-3}{x+1}+1\right)\,dx=-3\ \mathrm{Ln}\,|x+1|+x+C$$

Para determinar la primitiva cuya gráfica pase por el punto (0, 1), sustituiremos la x por 0 en la expresión anterior, y el resultado lo igualamos a 1, es decir, $F(0)=1$.

$$-3\ \mathrm{Ln}\,|0+1|+0+C=1\ \Rightarrow\ -3\ \mathrm{Ln}\,(1)+C=1\ \Rightarrow\ 0+C=1\ \Rightarrow\ C=1$$

Luego la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1) es:

$$\boxed{F(x)=-3\ \mathrm{Ln}\,|x+1|+x+1}$$

---

7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1,e^2). [Select. 2004]

Solución

Calculemos primeramente una primitiva de *f(x)*.

$$F(x)=\int(x-1)\ e^{2x}\,dx$$

Se trata de una integral por partes.

$$u=x-1 \qquad du=dx$$
$$dv=e^{2x}dx \qquad v=\int dv=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F(x)=\int(x-1)\ e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}(x-1)-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}(x-1)-\frac{1}{4}e^{2x}+\mathrm{K}=e^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)+\mathrm{K}$$

Obtengamos ahora la primitiva cuya gráfica pasa por el punto $\left(1,\mathrm{e}^2\right)$, es decir, que $F(1)=e^2$.

$$F(1)=e^2\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)+\mathrm{K}\ \Rightarrow\ e^2=e^2\left(\frac{-1}{4}\right)+\mathrm{K}\ \Rightarrow\ \mathrm{K}=\frac{5}{4}e^2$$

La primitiva que nos pide el ejercicio es:

$$\boxed{F(x)=e^{2x}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{4}e^2}$$

---

8. Sea $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)\ln x$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1,-3/2). [Sept. 2003]

Solución

Calculemos la integral indefinida siguiente:

$$\int(x-1)\ \mathrm{Ln}(x)\ dx=$$

la resolveremos haciendo uso del método de integración por partes.

$$u = \text{Ln}(x) \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$dv = (x-1)\,dx \qquad v = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\text{Ln}(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\text{Ln}(x) - \int \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\text{Ln}(x) - \left(\frac{x^2}{4} - x\right) + C$$

Obtengamos ahora de toda esta familia de primitivas aquella cuya gráfica pasa por el punto (1, -3/2).

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\text{Ln}(x) - \left(\frac{x^2}{4} - x\right) + C \Rightarrow F(1) = \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\text{Ln}(1) - \left(\frac{1^2}{4} - 1\right) + C = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) + C = -\frac{3}{2} \Rightarrow C = -\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \Rightarrow C = -\frac{9}{4}$$

Luego la primitiva de *f* es:

$$\boxed{F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\text{Ln}(x) - \left(\frac{x^2}{4} - x\right) - \frac{9}{4}}$$

---

9. a) Determina la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ y que su valor mínimo es -12.

b) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de inflexión de su gráfica. [Select. 2002]

<u>Solución</u>

(a) La función *f (x)* está definida en todo $\mathbb{R}$ y es derivable, luego es continua en $\mathbb{R}$. Integrando su función derivada obtendremos la función *f*.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(2x^3 - 6x^2\right)dx = 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + C$$

Como el valor mínimo es -12, tendremos que calcular el punto donde la función alcanza el mínimo absoluto. Estudiemos la monotonía y obtengamos los mínimos relativos de *f*.

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada:

$$2x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \end{cases}$$

sustituyamos estos valores que anulan a la primera derivada en la segunda:

$$f''(x) = 6x^2 - 12x \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f''(3) = 6 \times 3^2 - 12 \times 3 = 18 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ mínimo relativo en } x = 3.$$

El valor, 0, que anula a la segunda derivada sustituyámoslo en la tercera:

$$f'''(x) = 12x - 12 \Rightarrow \quad f'''(0) = 12 \times 0 - 12 = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{ punto de inflexión en } x = 0.$$

Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

Con los dos valores, 0 y 3, que anulan a la primera derivada, los ordenamos y construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, -1, 1 y 4 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1)^2 = -8 < 0 \Rightarrow & \text{decreciente en } (-\infty, 0) \\ f'(1) = 2 \times 1^3 - 6 \times 1^2 = -4 < 0 \Rightarrow & \text{decreciente en } (0, 3) \\ f'(4) = 2 \times 4^3 - 6 \times 4^2 = 32 > 0 \Rightarrow & \text{creciente en } (3, +\infty) \end{cases}$$

A la vista del estudio realizado, en el punto 3 que era donde había un mínimo relativo también es donde se da el mínimo absoluto. Por tanto, como el valor mínimo es -12, significa que en el punto $x = 3$ la función alcanza el valor -12:

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + C \Rightarrow f(3) = \frac{3^4}{2} - 2 \times 3^3 + C \Rightarrow -12 = \frac{3^4}{2} - 2 \times 3^3 + C \Rightarrow$$

$$-24 = 81 - 108 + 2C \Rightarrow 2C = 3 \Rightarrow C = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + \frac{3}{2}}$$

10. Calcula $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx$ [Select. 2002]

Solución:

Si observamos la integral racional vemos que se trata de una integral racional impropia debido a que el grado del polinomio del numerador es de grado mayor que el del denominador.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & -2x & +3 & x^2 - 1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +x & & x + 2 \\ \cline{1-4} & 2x^2 & -x & +3 & \\ & -2x^2 & & +2 & \\ \cline{2-4} & & -x & +5 & \end{array}$$

La integral será:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx = \int (x + 2)\, dx + \int \frac{-x + 5}{x^2 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{-x + 5}{x^2 - 1} dx = \quad [1]$$

Descompongamos el integrando de la integral racional propia en una suma de fracciones elementales, sabiendo que las raíces del denominador son 1 y -1:

$$\frac{-x+5}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{-x+5}{x^2-1}=\frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \quad \Rightarrow$$

$$-x+5=A(x-1)+B(x+1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1 & \Rightarrow \quad 4=2B \quad \Rightarrow \quad B=2 \\ x=-1 & \Rightarrow \quad 6=-2A \quad \Rightarrow \quad A=-3 \end{cases}$$

Continuando desde [1]

$$=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{A}{x+1}\,dx+\int\frac{B}{x-1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{-3}{x+1}\,dx+\int\frac{2}{x-1}\,dx=$$

$$=\boxed{\frac{x^2}{2}+2x-3\,\mathrm{Ln}\left|x+1\right|+2\,\mathrm{Ln}\left|x-1\right|+k}$$

---

11. Sea $f: D \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

a) Determina el conjunto D sabiendo que está formado por todos los puntos $x\in\mathbb{R}$ para los que existe *f(x)*.

b) Usa el cambio de variable $t=\ln x$ para calcular una primitiva de f. [Select. 2002]

<u>Solución</u>

(a) El conjunto D, que es el dominio de la función *f(x)*, estará formado por todos aquellos puntos $x \in \mathbb{R}$, tales que cumplan las siguientes condiciones:

$$x\,(\mathrm{Ln}(x))^2 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad x>0$$

es decir, sólo pueden pertenecer al dominio los valores que no anulen al denominador y los que hagan que el argumento, x, del logaritmo neperiano sea mayor que cero.

Calculemos los valores que anulen al denominador, porque son, los que en principio, no pertenecerán al dominio.

$$x\,(\mathrm{Ln}\,(x))^2=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ (\mathrm{Ln}\,(x))^2=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}\,(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \end{cases}$$

luego el punto 0 y 1 no peretenecerán al dominio, y como los valores que debe tomar x son mayores que cero, el conjunto D estará formado por los intervalos:

$$\boxed{D=(0,\,1)\cup(1,\,+\infty)}$$

(b) Calculemos mediante el método de sustitución una primitiva de *f*.

$$\int\frac{1}{x\,(Ln(x))^2}\,dx$$

Hagamos el cambio de variable siguiente: $t=\mathrm{Ln}\,(x)$

diferenciando la expresión anterior obtenemos: $dt=\dfrac{1}{x}\,dx$

la integral quedará así:

$$\int\frac{1}{x\,(Ln(x))^2}\,dx=\int\frac{1}{t^2}\,dt=\int t^{-2}\,dt=\frac{t^{-1}}{-1}=\frac{-1}{t}=\boxed{\frac{-1}{\mathrm{Ln}(x)}+k}$$

hemos obtenido una primitiva de *f*, y donde en el último paso hemos deshecho el cambio inicial.

---

12. Encuentra la función derivable $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ que cumple que $f(1)=-1$ y

$$f'(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad -1\le x<0 \\ e^x-1 & si \quad 0\le x\le 1 \end{cases}$$ [Sept. 1999]

Si la función derivada, $f'(x)$, es

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & si \quad -1 \le x < 0 \\ e^x - 1 & si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

la función $f(x)$ será

$$f(x) = \begin{cases} \int \left(x^2 - 2x\right) dx & si \quad -1 \le x < 0 \\ \int \left(e^x - 1\right) dx & si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + a & si \quad -1 \le x < 0 \\ e^x - x + b & si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Al ser la función $f(x)$ derivable en [-1, 1] es continua en dicho intervalo, ya que la derivabilidad implica la continuidad. Por tanto la función es continua en $x = 0$, luego ha de verificarse que los límites laterales y el valor de la función en dicho punto coinciden. Comprobémoslo.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \left(e^x - x + b\right) = e^0 - 0 + b = 1 + b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + a\right) = 0 + a = a$$

$$f(0) = e^0 - 0 + b = 1 + b$$

igualemos los límites laterales y el valor de la función en $x = 0$: $a = 1 + b$

Como además, el ejercicio nos dice que $f(1) = -1$, tendremos:

$$f(1) = e^1 - 1 + b \Rightarrow -1 = e - 1 + b \Rightarrow b = -e \quad ; \quad a = 1 + b \Rightarrow a = 1 - e$$

la función $f(x)$, finalmente será: $$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & si \quad -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}}$$