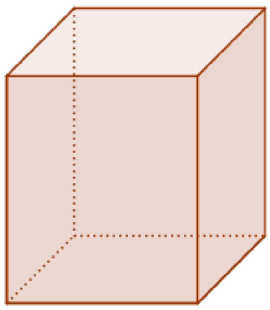
14. *Queremos construir una caja abierta de base cuadrada y volumen 256 litros. Halla las dimensiones para que la superficie, y por tanto el coste, sea mínimo.*

<u>*Solución*</u>:



La función área es la que queremos minimizar: $A = x^2 + 4xy$

La relación entre las variables la establecemos a través del volumen:

V=256 *l* =256 dm^3

$$V = A_B h = x^2 y \Rightarrow 256 = x^2 y \quad .$$

En este caso es más favorable despejar y : $y = \frac{256}{x^2}$

y sustituir en la función área:

$$A(x) = x^2 + 4x\frac{256}{x^2} = x^2 + \frac{1024}{x}$$

Los extremos relativos de la función están entre los valores que anula la primera derivada:

$$A'(x) = 2x - \frac{1024}{x^2}$$

$$2x - \frac{1024}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 1024}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 1024 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{512} \Rightarrow x = 8$$

Para decidir el tipo de extremo aplicamos el criterio del signo del valor de la segunda derivada:

$A''(x) = 2 - \frac{-1024 \cdot 2x}{x^4} = 2 + \frac{2048}{x^3} \quad \Rightarrow A''(8) = 2 + \frac{2048}{8^3} > 0$ Por tanto en *x=8* hay un mínimo.

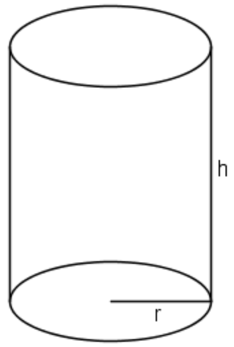
Para $x = 8 \Rightarrow y = \frac{256}{8^2} = 4$

Por tanto, las dimensiones de la caja de menor área son: $8 \times 8 \times 4\ dm$

Puedes ver la solución en el siguiente applet de Geogebra: [Ver solución]

15. *Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm². Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.*

Solución:



La función volumen es la que queremos maximizar: $V = \pi r^2 h$

La relación entre las variables la establecemos a través del área total:

$$A_T = 2A_B + A_L, \quad 200 = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

En este caso es más favorable despejar h:

$$h = \frac{200 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{100}{\pi r} - r$$

y sustituir en la función volumen:

$$V(r) = \pi r^2 \left(\frac{100}{\pi r} - r \right) = 100r - \pi r^3$$

Los extremos relativos de la función están entre los valores que anula la primera derivada:

$$V'(r) = 100 - 3\pi r^2 \;\Rightarrow\; 100 - 3\pi r^2 = 0 \;\Rightarrow\; r^2 = \frac{100}{3\pi} \;\Rightarrow\; r = \pm\sqrt{\frac{100}{3\pi}} \;\Rightarrow\; r = \sqrt{\frac{100}{3\pi}}$$

Para decidir el tipo de extremo aplicamos el criterio del signo del valor de la segunda derivada:

$$V''(r) = -6\pi r \;\Rightarrow\; V''\left(\sqrt{\frac{100}{3\pi}}\right) = -6\pi\sqrt{\frac{100}{3\pi}} < 0 \;\; Por\ tanto\ en\ \; r = \sqrt{\frac{100}{3\pi}} \;\; \text{hay un máximo.}$$

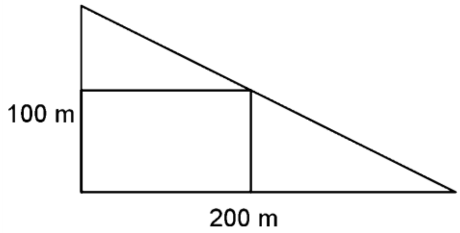
$$\text{Para } r = \sqrt{\frac{100}{3\pi}} \;\Rightarrow\; h = \frac{100 - \pi\left(\sqrt{\frac{100}{3\pi}}\right)^2}{\pi\sqrt{\frac{100}{3\pi}}} = \frac{100 - \cancel{\pi}\frac{100}{3\cancel{\pi}}}{\pi\sqrt{\frac{100}{3\pi}}} = \frac{200}{3\pi\sqrt{\frac{100}{3\pi}}} = \frac{200\sqrt{\frac{100}{3\pi}}}{3\pi\sqrt{\frac{100}{3\pi}}\sqrt{\frac{100}{3\pi}}} = \frac{200\sqrt{\frac{100}{3\pi}}}{\cancel{3\pi}\frac{100}{\cancel{3\pi}}} = 2\sqrt{\frac{100}{3\pi}}$$

Por tanto, las medidas del cilindro que hacen el volumen máximo son:

$$r = \sqrt{\frac{100}{3\pi}}\ cm \quad y \quad h = 2\sqrt{\frac{100}{3\pi}}\ cm$$

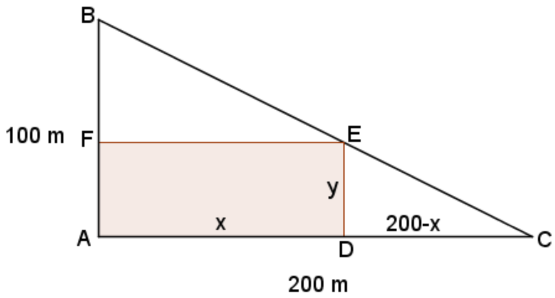
Puedes ver la solución en el siguiente applet de Geogebra: Ver solución

20. *Sobre un terreno con forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden, respectivamente, 200 metros, se quiere construir un edificio de planta rectangular como se muestra en la figura. Halla las dimensiones que debe tener dicha planta para que su superficie sea máxima.*



100 y

<u>Solución</u>:



La función área es la que queremos maximizar: $A = x \cdot y$

La relación entre las variables la sacamos por semejanza de triángulos:

Los triángulos ABC y DEC son semejantes, por tanto sus lados son proporcionales:

$$\frac{2\cancel{0}\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{200-x}{y} \Rightarrow 2y = 200 - x \;\Rightarrow\; y = 100 - \frac{1}{2}x\,.$$

$$A(x) = x \cdot y = x\left(100 - \frac{1}{2}x\right) = 100x - \frac{1}{2}x^2$$

Los extremos relativos de la función están entre los valores que anula la primera derivada:

$$A'(x) = 100 - x$$

$$100 - x = 0 \Rightarrow x = 100$$

Para decidir el tipo de extremo aplicamos el criterio del signo del valor de la segunda derivada:

$$A''(x) = -1 \;\Rightarrow\; A''(100) = -1 < 0 \;\; \textit{Por tanto en} \;\; x = 100 \;\; \text{hay un máximo.}$$

Para $x = 100 \Rightarrow y = 100 - \frac{1}{2}100 = 100 - 50 = 50$

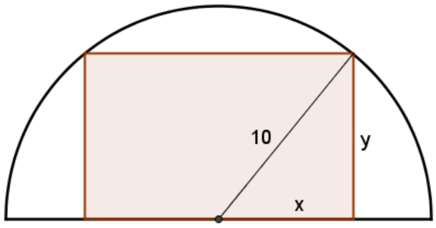
Por tanto, las dimensiones de la planta rectangular del edificio de área máxima son:

$$100\ m \times 50\ m$$

21. *En un jardín con forma de semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva.*

Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.

<u>Solución</u>:



La función área es la que queremos maximizar: $A = 2x \cdot y$

La relación entre las variables es: $x^2 + y^2 = 10^2$. Se despeja una de las variables:

$y = \pm\sqrt{100 - x^2}$, al tratarse de una dimensión tomamos el valor positivo:

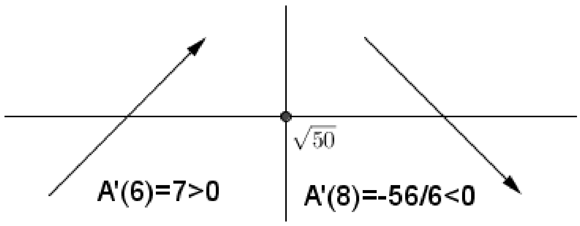
$$A(x) = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

Los extremos relativos de la función están entre los valores que anula la primera derivada:

$$A'(x) = 2\sqrt{100 - x^2} + 2x \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$\frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50}$. Se toma el valor positivo al ser el valor de una dimensión: $x = \sqrt{50}$.

Para decidir el tipo de extremo aplicamos el criterio de cambio de monotonía en un entorno de $x = \sqrt{50}$:



$$\left.\begin{array}{l} \text{La función A es CRECIENTE en } \left(0, \sqrt{50}\right) \\ \text{La función A es DECRECIENTE en } \left(\sqrt{50}, +\infty\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Máximo en x=}\sqrt{50}$$

Para $x = \sqrt{50} \Rightarrow y = \sqrt{100 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{50}$

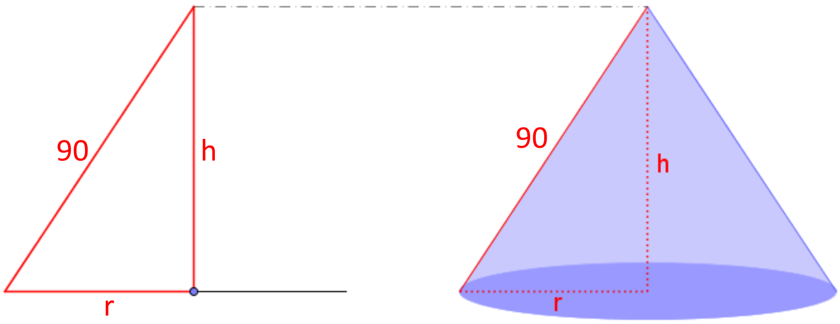
Por tanto las dimensiones del rectángulo de mayor área es: $2\sqrt{50}\ cm \times \sqrt{50}\ cm$

Que tiene un área de $100\ cm^2$.

Puedes ver la solución en el siguiente applet de Geogebra: [Ver solución]

22. *La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo?*

Solución:



La función volumen es la que queremos maximizar: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

La relación entre las variables es : $r^2 + h^2 = 90^2$. En este caso es más favorable despejar r^2:

$r^2 = 8100 - h^2$ y sustituir en la función volumen:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(8100 - h^2)h = 2700\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

Los extremos relativos de la función están entre los valores que anula la primera derivada:

$V'(h) = 2700\pi - \pi h^2 \Rightarrow 2700\pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{2700\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \Rightarrow h = \pm\sqrt{2700} \Rightarrow h = 30\sqrt{3}$ Para decidir el tipo de extremo aplicamos el criterio del signo del valor de la segunda derivada:

$V''(h) = -2\pi h \Rightarrow V''(30\sqrt{3}) = -2\pi 30\sqrt{3} < 0$ *Por tanto en* $h = 30\sqrt{3}$ hay un máximo.

Para $h = 30\sqrt{3} \Rightarrow r^2 = 8100 - \left(30\sqrt{3}\right)^2 = 8100 - 2700 = 5400 \Rightarrow r = \sqrt{5400} = 30\sqrt{6}$

Por tanto, las medidas de los catetos que hacen el volumen máximo son:

$$r = 30\sqrt{6}\ cm \ \ y \ \ h = 30\sqrt{3}\ cm$$

Puedes ver la solución en el siguiente applet de Geogebra: [Ver solución]